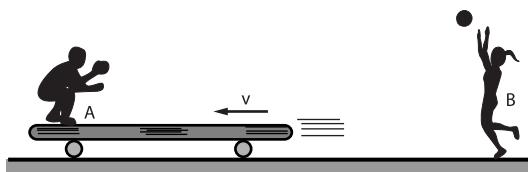


TEST

- 1.- Una niña B, parado sobre la tierra lanza verticalmente hacia arriba una piedra. De entre las siguientes curvas indique cuál corresponde a la trayectoria espacial "visita" por A, quien como se muestra, se desplaza con velocidad constante respecto a tierra.



- a) 

b) 

c) 

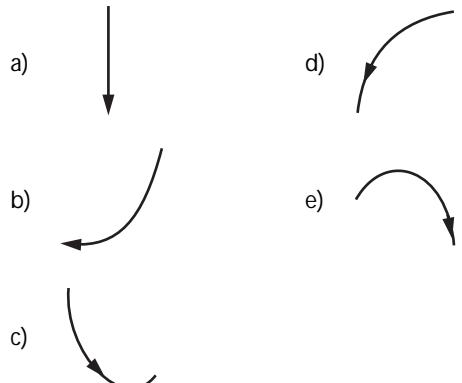
d) 

e) 

- 2.- Si en el caso de la pregunta anterior fuera a quien en su plataforma lanza la piedra verticalmente hacia arriba. La trayectoria espacial vista por un observador estático colocado al costado de la pista sería:

- a) D
 - b) C
 - c) E
 - d) A
 - e) B

- 3.- Un cazador ve un pájaro volando horizontalmente hacia su izquierda, por encima de él. Le dispara, acierta y el pájaro cae. La curva espacial descrita por el pájaro en su caída será:



- 4.- Para un proyectil lanzado en el vacío con cierto ángulo de inclinación, señalar verdadero (V) o falso (F):

 - El movimiento vertical es dependiente del movimiento horizontal.
 - En el punto de altura máxima la velocidad instantánea es cero.
 - En el punto de altura máxima la aceleración total es g .

- a) FFF
 - b) VVF
 - c) FFV
 - d) VVV
 - e) VFV

- 5.- Respecto a los lanzamientos de proyectiles en el vacío con cierto ángulo de inclinación, señalar verdadero (V) o falso (F).

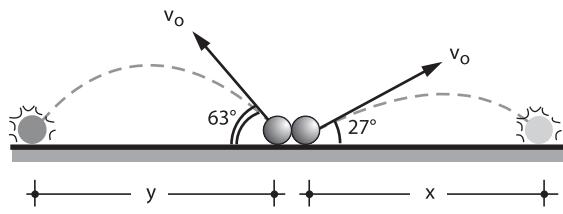
- I) Si la mira de un cañón que lanza proyectiles con la misma velocidad, se ajusta en dos tiros con ángulos complementarios, se logrará el mismo alcance.
 - II) Ajustando el ángulo de tiro 45° se logra el mayor alcance.
 - III) El tiempo de vuelo depende expresamente de la componente horizontal de la velocidad.

- a) VVF
 - b) VVV
 - c) FVF
 - d) VFV
 - e) VFF

- 6.- Si desde un avión en vuelo, soltamos una bomba desde cierta altura “H”, se puede afirmar:

- a) Al cabo de cierto tiempo el avión estará más lejos que la bomba respecto a otra vertical.
 - b) El avión y la bomba siempre ocuparán la misma vertical.
 - c) La velocidad de la bomba siempre será igual a la velocidad del avión.
 - d) El avión siempre estará más adelante que la bomba.
 - e) El avión siempre estará detrás de la bomba.

- 7.- Respecto a los lanzamiento efectuados de una partícula en el vacío como se observa en la figura, que alternativa se cumple:



a) $y = 2x$

d) $y < x$

b) $y = \frac{x}{2}$

e) $x > y$

c) $y = x$

- 8.- El alcance máximo de un proyectil se logra ajustando la mira a 45° , en dicho caso éste alcance es:

a) $\frac{v_0^2}{2g}$

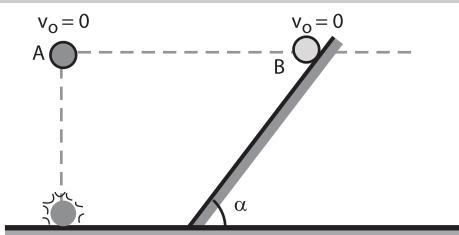
d) $\frac{v_0^2}{4g}$

b) $\frac{2v_0^2}{g}$

e) N.A.

c) $\frac{v_0^2}{g}$

- 9.- De la situación física de los cuerpos soltados de una misma altura y sin resistencias y en el vacío. ¿Qué se cumple?



- a) Tardan igual tiempo en llegar.
 b) Al llegar al piso, "A" tiene mayor velocidad que "B".
 c) Al llegar al piso, "A" y "B" tienen la misma velocidad.
 d) "A" tarda más tiempo en llegar.
 e) "a" y "c" son correctas.

- 10.- Para el lanzamiento de un proyectil con " v_0 " y en el vacío con un ángulo de tiro " α " señalar verdadero (V) o falso (F).

- I.- Siendo "x" el alcance e "y" la altura máxima, siempre se cumple que $x = 4y \operatorname{ctg} \alpha$.
 II.- La componente horizontal de la velocidad siempre es $v_0 \cos \alpha$.
 III.- El alcance para un ángulo de 30° sería $\frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$

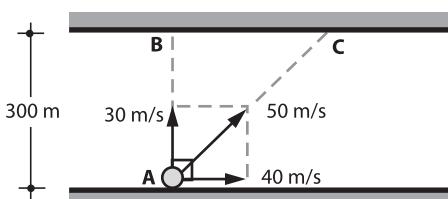
- a) VVV
 c) FVF
 d) FVV
 d) FFV
 e) VVF

PROBLEMAS RESUELTOS

▲ PROBLEMAS DE APLICACIÓN

- 1.- Un nadador cuya velocidad es de 30 m/s en aguas tranquilas decide cruzar un río de 300 m de ancho, cuyas aguas tienen una velocidad de 40 m/s, para tal efecto se lanza perpendicularmente a la orilla del río. Calcular el espacio recorrido por el nadador.

Solución:



Aplicaremos el principio de independencia de los movimientos.

- Entre A y B (M.R.U.): $e = vt$

$$300 = 30t \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

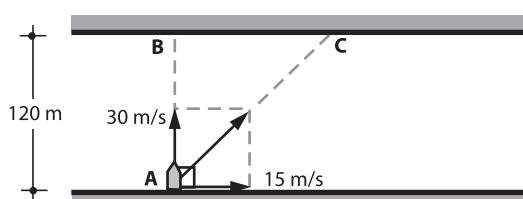
- Entre A y C (M.R.U.): $e = ?$

$$e = vt$$

$$e = 50(10) \Rightarrow e = 500 \text{ m}$$

- 2.- Una lancha a motor parte desde la orilla de un río de 120 m de ancho con una velocidad constante de 30 m/s perpendicular a él; las aguas del río tienen una velocidad de 15 m/s. ¿Qué tiempo tarda la lancha en llegar a la otra orilla?

Solución:



Aplicaremos el principio de independencia de los movimientos.

Entre A y B (M.R.U.):

$$e = vt$$

$$120 = 30t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

- 3.- Una pelota sale rodando del borde de una mesa de 1,25 m de altura; si cae al suelo en un punto situado a 1,5 m del pie de la mesa. ¿Qué velocidad tenía la pelota al salir de la mesa? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Solución:

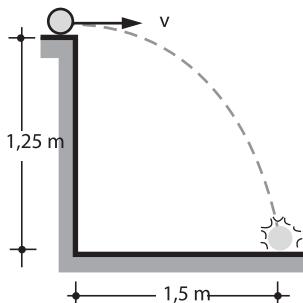
Verticalmente: (caída libre)

$$v_0 = 0$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$1,25 = \frac{1}{2}(10)t^2$$

$$t = 0,5 \text{ s}$$



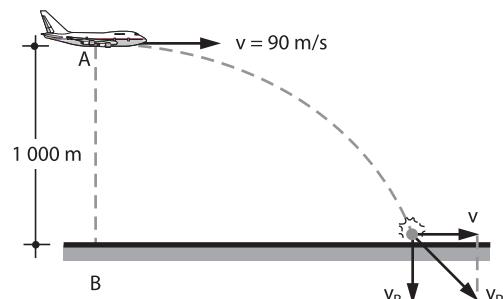
Horizontalmente (M.R.U.):

$$e = vt$$

$$1,5 = v(0,5) \Rightarrow v = 3 \text{ m/s}$$

- 4.- Un avión que vuela horizontalmente a razón de 90 m/s, deja caer una bomba desde una altura de 1 000 m. ¿Con qué velocidad aproximada llega la bomba a tierra? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Solución:



Verticalmente (caída libre)

$$v_F^2 = v_0^2 + 2gh \quad (\text{baja})$$

$$v_B^2 = 0 + 2(10)(1000)$$

$$v_B^2 = 20000$$

$$\square \quad v_R^2 = v^2 + v_B^2$$

$$v_R^2 = (90)^2 + 20000$$

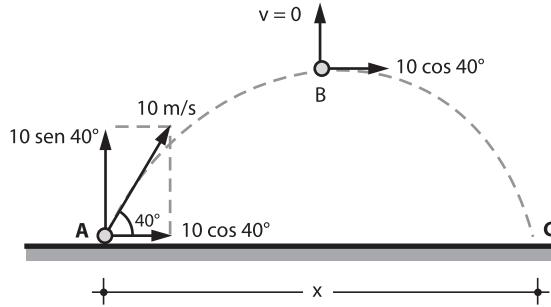
$$v_R^2 = 8100 + 20000 \Rightarrow v_R = 167 \text{ m/s}$$

- 5.- Una pelota fue lanzada con una velocidad inicial de 10 m/s, formando con el horizonte un ángulo de 40° , hallar.

- ¿Cuánto tiempo se encontró en movimiento?
- ¿Hasta qué altura subió la pelota?
- ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cayó la pelota?

$$\sin 40^\circ = 0,6428 ; \cos 40^\circ = 0,7660 ; g = 10 \text{ m/s}^2$$

Solución:



- a) Entre A y B (verticalmente):

$$v_F = v_0 - gt \quad (\text{sube})$$

$$0 = 10 \sin 40^\circ - 10t \Rightarrow t = \sin 40^\circ$$

$$t = 0,6428 \text{ s}$$

$$T_{\text{total}} = t_{AB} + t_{BC} = 0,6428 + 0,6428$$

$$T_{\text{total}} = 1,2856 \text{ s}$$

- b) Entre A y B (verticalmente):

$$h = \left(\frac{v_F + v_0}{2} \right) t$$

$$h = \left(\frac{0 + 10 \sin 40^\circ}{2} \right) 0,6428$$

$$h = (5 \times 0,6428)(0,6428) \Rightarrow h = 2,07 \text{ m}$$

- c) Entre A y C (horizontalmente): M.R.U.

$$e = vt$$

$$x = (10 \cos 40^\circ)(T_{\text{total}})$$

$$x = (10 \times 0,7660)(1,2856) \Rightarrow x = 9,85 \text{ m}$$

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

- 1.- Una pelota lanzada horizontalmente choca con una pared que se encuentra a 5 m de distancia del sitio desde la cual se lanzó. La altura del punto en que la pelota choca con la pared es un metro más bajo que la altura desde el cual fue lanzada. Determinar con qué velocidad inicial fue lanzada la pelota.

Solución:

- Verticalmente (entre A y B):

$$v_0 = 0$$

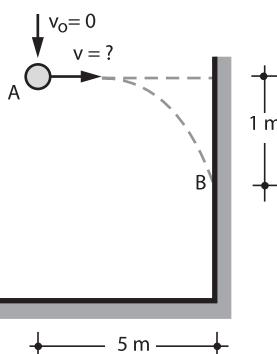
$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$h = 1 \text{ m}$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$1 = 0(t) + \frac{1}{2}(9,8)t^2$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{4,9}} \text{ s}$$

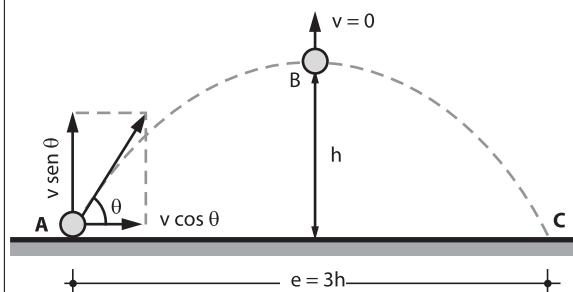


- Horizontalmente (M.R.U.):

$$e = vt$$

$$5 = v \times \frac{1}{\sqrt{4,9}} \Rightarrow v = 11,07 \text{ m/s}$$

- 2.- Determinar el ángulo de lanzamiento de una partícula de tal modo que su alcance horizontal sea el triple de su altura máxima.

Solución:

- Verticalmente (A y B):

$$h = \left(\frac{v_f + v_0}{2} \right) t$$

$$h = \left(\frac{0 + v \sin \theta}{2} \right) t$$

$$h = \left(\frac{v \sin \theta}{2} \right) t \quad \dots \dots \dots (1)$$

- Horizontalmente (A y C): $T = 2t$

$$e = v_h t$$

$$3h = (v \cos \theta)(2t) \quad \dots \dots \dots (2)$$

- (1) : (2)

$$\frac{1}{3} = \frac{\tan \theta}{4} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

3.-

Desde el descansillo de una escalera se lanza una bola con velocidad de 3 m/s. Si el alto y ancho de cada escalón es de 0,25 m c/u. ¿En qué escalón caerán por primera vez la bola? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Solución:

- Verticalmente:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} \times 10 t^2$$

$$h = 5t^2 \quad \dots \dots \dots (a)$$

- Horizontalmente:

$$e = vt = 3t$$

$$e = 3t \quad \dots \dots \dots (b)$$

$$(a) = (b) \text{ ya que: } e = h$$

$$3t = 5t^2 \Rightarrow t = \frac{3}{5} \text{ s}$$

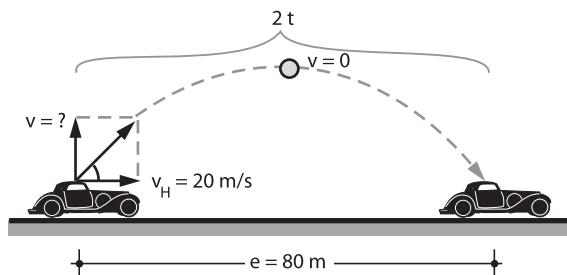
- En (b):

$$e = 3 \left(\frac{3}{5} \right) \Rightarrow e = 1,8 \text{ m}$$

$$\text{Nº Escalón} \cong \frac{1,80}{0,25} \cong 7,2 \cong 8^\circ$$

4.-

Un automóvil se mueve horizontalmente con una velocidad de 20 m/s. ¿Qué velocidad se le dará a un proyectil, disparado verticalmente hacia arriba desde el auto, para que regrese nuevamente sobre él, después que el auto haya recorrido 80 m? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Solución:

- Con el proyectil (verticalmente):

$$v_f = v_0 - gt$$

$$0 = v - 10t \Rightarrow t = \frac{v}{10}$$

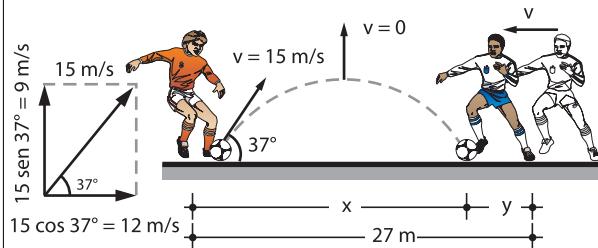
- Con el proyectil (horizontalmente):

$$e = v_h T = v_h (2t)$$

$$80 = 20 \times \frac{2v}{10} \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

- 5.- Un jugador de fútbol patea una pelota, que sale disparada a razón de 15 m/s y haciendo un ángulo de 37° con la horizontal. Pedro, un jugador se encuentra a 27 m de distancia y delante del primero, corre a recoger la pelota. ¿Con qué velocidad debe correr este último para recoger la pelota justo en el momento en que ésta llega a tierra? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Solución:



□ Con la pelota (verticalmente):

$$v_f = v_0 - gt$$

$$0 = 9 - 10t \Rightarrow t = 0,9 \text{ s}$$

□ Con la pelota (horizontalmente):

$$x = vT = v(2t)$$

$$x = 12(2 \times 0,9) \Rightarrow x = 21,6 \text{ cm}$$

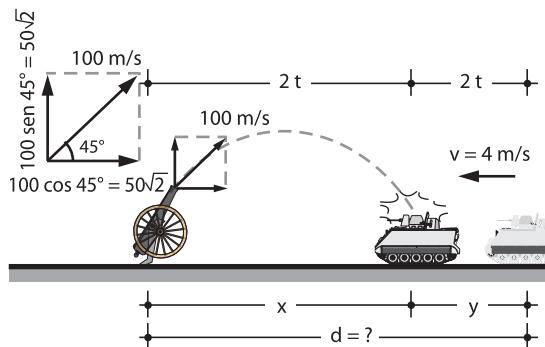
□ Con Pedro: $y = 27 - x = 5,4 \text{ m}$

$$y = vT = v(2t)$$

$$5,4 = v(2 \times 0,9) \Rightarrow v = 3 \text{ m/s}$$

- 6.- Un mortero dispara un proyectil bajo un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 100 m/s. Un tanque avanza, dirigiéndose hacia el mortero con una velocidad de 4 m/s, sobre un terreno horizontal. ¿Cuál es la distancia entre el tanque y el mortero en el instante del disparo, si hace blanco? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Solución:



□ Con el proyectil (verticalmente de subida):

$$v_f = v_0 - gt$$

$$0 = 50\sqrt{2} - 10t \Rightarrow t = 5\sqrt{2} \text{ s}$$

□ Con el proyectil (horizontalmente):

$$e = v_H(T) = 50\sqrt{2}(2t)$$

$$x = 50\sqrt{2}(2 \times 5\sqrt{2}) \Rightarrow x = 1000 \text{ m}$$

□ Con el tanque:

$$e = v(T) = v(2t)$$

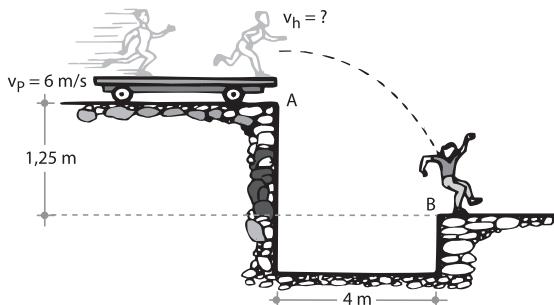
$$y = 4 \times 2 \times 5\sqrt{2} \Rightarrow y = 56,6 \text{ m}$$

□ Finalmente:

$$d = x + y$$

$$d = 1000 + 56,6 \Rightarrow d = 1056,6 \text{ m}$$

- 7.- En la figura, la plataforma se desplaza a razón constante de 6 m/s. ¿Con qué velocidad respecto a la plataforma debe el hombre correr sobre la plataforma para salir horizontalmente del borde y llegar justo al otro extremo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Desprecie la altura de la plataforma.



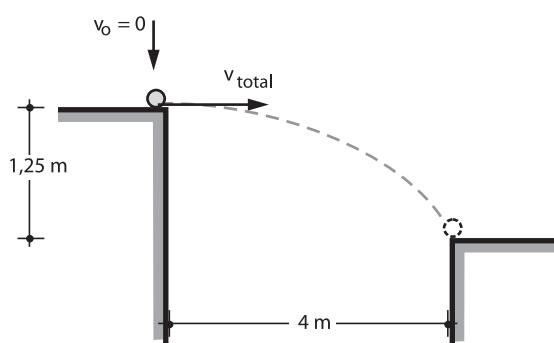
Solución:

□ Entre A y B (verticalmente): $v_0 = 0$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$1,25 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 10 t^2 \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

Ilustrando:



- Entre A y B (horizontalmente) M.R.U.

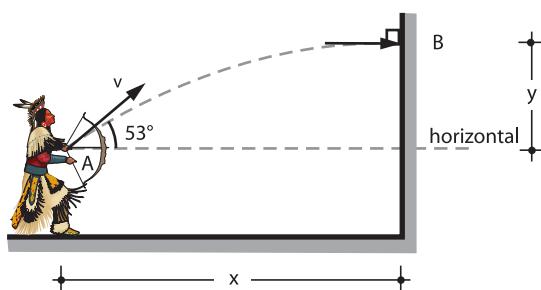
$$e = (v_{\text{total}})t$$

$$4 = v_{\text{total}}(0,5) \Rightarrow v_{\text{total}} = 8 \text{ m/s}$$

- Pero: $v_{\text{total}} = v_p + v_h$

$$8 = 6 + v_h \Rightarrow v_h = 2 \text{ m/s}$$

- 8.- Un apache desea clavar perpendicularmente una flecha en la pradera, lanzándola con un ángulo de 53° con la horizontal. Determinar la razón x/y .



Solución:

Nótese que la flecha por tener velocidad solo horizontal en B'' se encuentra en el punto de altura máxima.

- Verticalmente (entre A y B): $v_f^2 = v_0^2 - 2gy$

$$0 = (v \sin 53^\circ)^2 - 2gy$$

$$y = \frac{v^2 \sin^2 53^\circ}{2g} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{Además: } v_f = v_0 - gt$$

$$0 = v \sin 53^\circ - gt$$

$$t = \frac{v \sin 53^\circ}{g} \quad \dots \quad (2)$$

- Horizontalmente (entre A y B)

$$x = (v \cos 53^\circ)t \quad \dots \quad (3)$$

- (2) en (3):

$$x = (v \cos 53^\circ) \frac{(v \sin 53^\circ)}{g} \quad \dots \quad (4)$$

- Dividiendo (4) entre (1):

$$\frac{x}{y} = \frac{2 \cos 53^\circ}{\sin 53^\circ} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

- 9.- Desde la parte superior de un plano inclinado 37° con la horizontal, se lanza horizontalmente una esfera con una velocidad inicial de 10 m/s . Determinar el alcance "x" de la esfera a lo largo del plano inclinado.

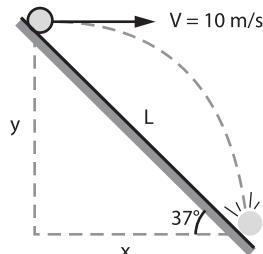
Solución:

- Horizontalmente:

$$x = vt$$

$$\frac{4}{5}L = (10)t$$

$$t = \frac{2}{25}L \quad \dots \quad (1)$$



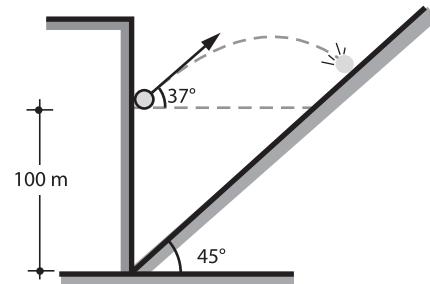
- Verticalmente:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{3}{5}L = \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots \quad (2)$$

- (1) en (2):

$$\frac{3}{5}L = \frac{1}{2}(10) \left(\frac{2}{25}L \right)^2 \Rightarrow L = 18,75 \text{ m}$$

- 10.- Una partícula es lanzada desde la ventana de un edificio ubicado a 100 m de altura, con una velocidad de 50 m/s y formando un ángulo de 37° con la horizontal. Determinar el tiempo que tarda en impactar con la colina ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



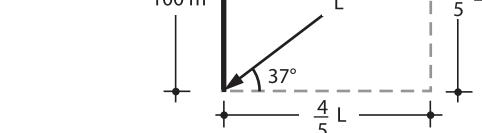
Solución:

- Horizontalmente (entre A y C):

$$e = vt$$

$$\frac{4}{5}L = 40t$$

$$L = 50t \quad \dots \quad (1)$$



- Verticalmente (entre A y C):

$$\bar{y} = \bar{v}_0 t - \frac{1}{2} \bar{g} t^2 \Rightarrow \left(\frac{3L}{5} - 100 \right) = 30t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots \quad (2)$$

- (1) en (2):

$$\frac{3}{5}50t - 100 = 30t - \frac{10}{2}t^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{5} \text{ s}$$

Recomendación:

Investigar método vectorial para problemas de caída libre.

PROBLEMAS PROPUESTOS

A PROBLEMAS DE APLICACIÓN

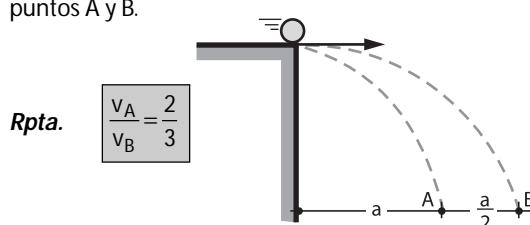
- 1.- Un avión vuela a 1 470 m de altura con una velocidad de 144 km/h. ¿A qué distancia antes de estar sobre el blanco deberá soltar la bomba?

Rpta. $40\sqrt{294}$ m

- 2.- Un proyectil es lanzado horizontalmente desde una altura de 36 m con velocidad de 45 m/s. Calcula: El tiempo que dura el proyectil en el aire y el alcance horizontal del proyectil ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rpta. $t = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ s ; $x = 54\sqrt{5}$ m

- 3.- En qué relación deben estar las velocidades de lanzamiento de la partícula si se desea que caiga en los puntos A y B.



- 4.- Una piedra es lanzada con un inclinación de 60° con la horizontal y una velocidad inicial de 40 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo se encontrará nuevamente en el suelo?

Rpta. $2\sqrt{3}$ s

- 5.- Un cañón dispara un proyectil con una velocidad inicial de 100 m/s y a una inclinación de 37° con respecto al horizonte. Calcular a qué distancia llega.

Rpta. 960 m

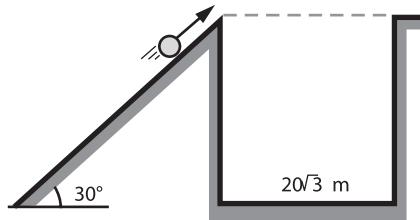
- 6.- Un cañón dispara una bala con una velocidad de 91 m/s. Cuando el ángulo de elevación es de 45° ; el alcance es de 820 m. ¿Cuánto disminuye el alcance la resistencia del aire?

Rpta. 8,1 m

- 7.- Se arroja una piedra a un pozo con ángulo de 60° respecto a la horizontal con velocidad de $10\sqrt{3}$ m/s. Si en 4 s llega al fondo del pozo. ¿Qué altura tendrá dicho pozo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rpta. 20 m

- 8.- Calcular la mínima velocidad que debe tener un móvil para pasar un obstáculo, como en la figura mostrada ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

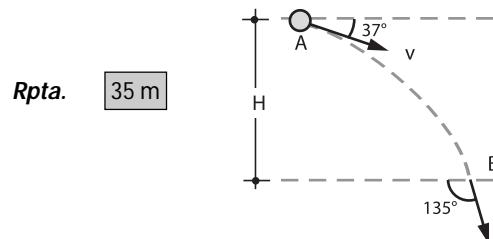


Rpta. 20 m/s

- 9.- Un avión vuela horizontalmente y suelta una bomba al pasar justo sobre un camión enemigo que se desplaza a 120 km/h y logra destruirlo 500 m más adelante. ¿Desde qué altura se soltó la bomba?

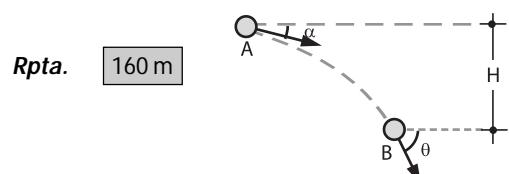
Rpta. 1 102,5 m

- 10.- Un partícula es lanzada desde "A" con una velocidad de 50 m/s. ¿Determinar el valor de "H"? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



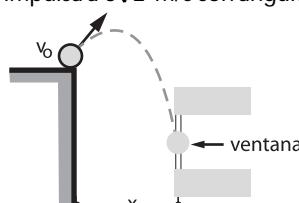
B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

- 1.- En la figura tenemos una porción de la trayectoria de un movimiento parabólico, si la velocidad en el punto "A" es $40\sqrt{2}$ m/s. Hallar la altura que hay entre "A" y "B" si: $\alpha = 45^\circ = \frac{3}{4}\theta$, ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



- 2.- La pelota mostrada se impulsa a $3\sqrt{2}$ m/s con ángulo de tiro de 45° . Al impactar sobre la ventana lo hace a 5 m/s. Hallar "x" ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rpta. 2,10 m



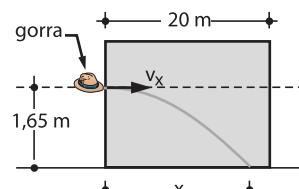
- 3.- Un mortero dispara un proyectil bajo un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 100 m/s . Un tanque avanza, dirigiéndose hacia el mortero con una velocidad de 4 m/s ; sobre un terreno horizontal. ¿Cuál es la distancia entre el tanque y el mortero en el instante del disparo si hace blanco? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rpta. $d = 40(25 + \sqrt{2}) \text{ m}$

- 4.- Una pelota sale rodando del borde de una escalera con una velocidad horizontal de $1,08 \text{ m/s}$, si los escalones tienen 18 cm de altura y 18 cm de ancho. ¿Cuál será el primer escalón que toque la pelota?

Rpta. Caerá en el 2^{do} escalón

- 5.- Un ciclista que va a una velocidad de 108 km/h , entra a un túnel de 20 m de largo, y al momento de entrar al túnel deja caer su gorra desde una altura de $1,65 \text{ m}$ del suelo. ¿La gorra caerá dentro del túnel?

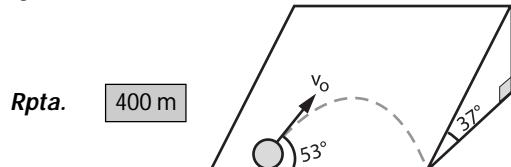


Rpta. Si, caerá dentro del túnel

- 6.- Se lanzan al mismo instante dos piedras, una con velocidad v_1 que hace 30° con la horizontal y la otra v_2 que forma 53° con la horizontal, si el tiempo que demoró caer a Tierra la que tiene v_1 , es 5 veces lo que demoró en caer a Tierra la que tiene v_2 . Hallar: v_1/v_2 ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

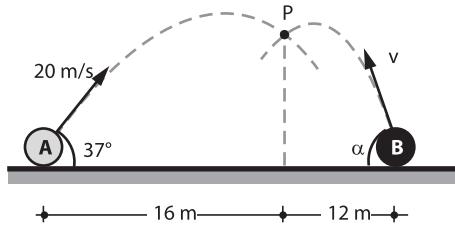
Rpta. 8

- 7.- Sobre una pista lisa inclinada, tal como se muestra, se lanza una bolita con una velocidad de 50 m/s y un ángulo de 53° . ¿Cuál es el alcance horizontal de la bolita? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



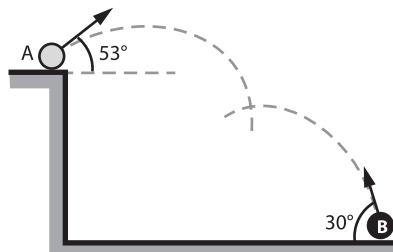
Rpta. 400 m

- 8.- Dos cuerpos lanzados simultáneamente de los puntos "A" y "B" chocan en el punto "P" tal como se muestra. ¿Cuánto vale "α"? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



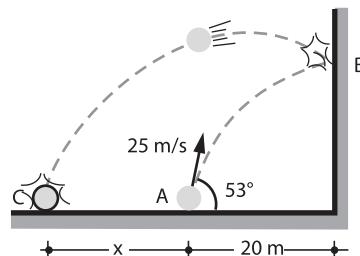
Rpta. 45°

- 9.- Si "A" y "B" se impulsan simultáneamente y chocan al cabo de 6 s , en el instante en que "B" logra su máxima altura. Hallar la distancia de separación vertical entre los puntos de lanzamiento si "A" se lanzó con 160 pies/s .



Rpta. 384 pies

- 10.- Un proyectil se lanza desde el punto "A" con una velocidad de 25 m/s como se indica, choca elásticamente en el punto "B" para finalmente impactar en el punto "C". Determine a qué distancia desde el punto de lanzamiento impacta en "C" y con qué velocidad llega.



Rpta. 20 m, 25 m/s